

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
BRATISLAVA**



RIGORÓZNA PRÁCA

Vladimír Palaj

BRATISLAVA 2006



Katedra algebry, geometrie a didaktiky Matematiky

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského, Bratislava

**ALGORITMICKÉ RIEŠENIA PRE
PRIENIK ČIAR
(METÓDA BÉZIEROVHO OREZÁVANIA)**

Rigorózna práca

Vladimír Palaj

BRATISLAVA 2006

Obsah

Abstrakt	5
Úvod	6
1. Reprezentácie kriviek	8
1.1 Analytické krivky	8
1.2 Interpoláčné krivky	9
1.3 Aproximačné krivky	9
1.3.1 Bézierove krivky	9
2. Metóda Bézierovho orezávania	17
2.1 Konvexný obal	17
2.1.1 Motivácia	17
2.1.2 Matematická reprezentácia konvexného obalu	18
2.2 Reparametrizácia ľubovoľného intervalu Bézierovej krivky	19
2.3 Konverzie a inverzie medzi reprezentáciami	19
2.3.1 Konverzia Bézierov – Monomiálny tvar (CBM)	20
2.3.2 Konverzia Monomiálny - Bézierov tvar (CMB)	20
2.3.3 Inverzia Bézierov – Polynomický tvar (IBP)	21
2.3.4 Inverzia Polynomický – Bézierov tvar (IPB)	23
2.4 Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2	25

3. Algoritmy Bézierovho orezávania	26
3.1 Korene polynómov	26
3.2 Prieniky typu KRIVKA – PRIAMKA	32
3.3 Prieniky typu KRIVKA – KRIVKA	35
3.3.1 Konštrukcia hrubej priamky	35
3.3.2 Kvadratická Bézierova krivka a jej užšia hrubá priamka	36
3.3.3 Kubická Bézierova krivka a jej užšia hrubá priamka	37
4. Záver a ďalšia práca	44
4.1 Bézierovo orezávanie pre nebézierovské krivky	44
4.2 Konvergencia Bézierovho orezávania	45
4.3 Programová realizácia	45
4.4 Experimenty	45
Zoznam použitej literatúry	46

Zoznam obrázkov

Obr. 1	Bernsteinove polynómy <i>a) b) c)</i>	11
Obr. 2	Geometrická interpretácia prvej derivácie v koncových bodoch	15
Obr. 3	Geometrická interpretácia druhej derivácie v koncových bodoch	15
Obr. 4	Konvexný obal štyroch bodov v rovine	18
Obr. 5	Inverzia Bézierov – Polynomický tvar (IBP) a Polynomický – – Bézierov tvar (IPB)	22
Obr. 6	Delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ polynomickej funkcie	24
Obr. 7	Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2	25
Obr. 8	Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky a parametrickej osí t	27
Obr. 9	Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – prázd- na množina	28
Obr. 10	Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – jeden bod	28
Obr. 11	Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – úsečka	29
Obr. 12	Zadanie CL algoritmu a konverzia CPB pre t intervalu $\langle a, b \rangle$	30
Obr. 13	PT algoritmus	31
Obr. 14	Zadanie CL algoritmu a vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i pre vrcholy Bézierovej kubiky	34

Obr. 15	Výsledok CL algoritmu	34
Obr. 16	Hrubá priamka krivky	35
Obr. 17	Užšia hrubá priamka kvadratickej Bézierovej krivky	37
Obr. 18	Užšia hrubá priamka kubickej Bézierovej krivky pre vrcholy Bézierovej krivky ležiace v jednej polrovine	38
Obr. 19	Užšia hrubá priamka kubickej Bézierovej krivky pre vrcholy Bézierovej krivky ležiace v opačných polrovinách	39
Obr. 20	Minmax obal	40
Obr. 21	CC algoritmus: <i>zadanie</i>	40
Obr. 22	CC algoritmus: <i>konštrukcia hrubej priamky a orientované vzdialenosti</i>	41
Obr. 23	CC algoritmus: <i>novovytvorená Bézierova krivka</i>	42
Obr. 24	CC algoritmus: <i>výsledok</i>	43

Abstrakt

Hľadanie bodov prieniku krivky a priamky alebo dvoch kriviek v rovine je založené na iteratívnej metóde orezávania. Algoritmy prezentované v tejto práci vychádzajú z geometrických vlastností Bézierovej reprezentácie kriviek, konverzie medzi jednotlivými reprezentáciami kriviek, určenia vzdialenostnej funkcie a hrubej priamky, ktoré sú následne aplikované v metóde Bézierovho orezávania.

Úvod

Počítačom podporované projektovanie (CAGD) zahŕňa v sebe rôzne aspekty geometrie, počítačovej geometrie, numerickej analýzy, teórie aproximácie, dátových štruktúr a počítačovej algebry. Pojednáva o rôznych problémoch, v ktorých je geometria spojená s počítačovými algoritmami.

V súvislosti s modelovaním kriviek v CAGD sa zaoberáme problematikou vyšetovania prieniku kriviek v rovine, ktoré je komplexným problémom a je základným medzníkom určujúcim nové metódy riešenia daného problému. V našom prístupe vyšetovanie prieniku dvoch kriviek v rovine je riešené upravenou *metódou Bézierovho orezávania*¹, presnejšie jej praktickými algoritmickými aplikáciami. Táto metóda bola navrhnutá Nishitom a kol. [1998], pozri [16]. Cieľom pre proces vyšetovania prieniku, zatiaľ dvoch kriviek, bolo zapísať pomocou algoritmov (zostavených do troch skupín podľa objektu skúmania) nasledovné problémy:

- *korene polynómov (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s parametrickou osou)*
- *prienik typu priamka - krivka (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s priamkou vo všeobecnej polohe)*
- *prienik typu krivka - krivka (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s inou krivkou)*

Je zrejmé, že základ tejto práce tvorí pojem krivky, resp. čiary a jej následné geometrické modelovanie. V predkladanej práci budeme pracovať v rovine a to s polynomickými krivkami tretieho stupňa ($n = 3$), teda pôjde o rovinné kubické krivky.

Prvá kapitola tvorí prehľad reprezentácií kriviek. Uvádzame ich definície a základné vlastnosti, ktoré opisujeme v nasledujúcich kategóriách. Sústredíme sa najmä na štúdium Bézierových kriviek, ktoré sa dajú ľahko konštruovať a o ktoré sa neskôr budeme opierať.

¹ Z anglického *Bézier clipping method*

Ďalšia kapitola sa týka vlastností konvexného obalu a problematiky konverzií medzi jednotlivými reprezentáciami Bézierových kriviek, pričom mnohé skutočnosti sú zdôvodnené. Určenie konvexného obalu krivky v rovine sme zjednodušili, kvôli stupňu $n = 3$ danej krivky, na hľadanie konvexnej množiny štyroch bodov v rovine.

Tretiu kapitolu tvoria tri algoritmy (PT algoritmus, CL algoritmus a CC algoritmus) doplnené o vytvorenie tzv. hrubej priamky vhodnej pri vyšetrovaní prieniku tretieho typu (CC algoritmus).

Posledná kapitola (*záver a ďalšia práca*) obsahuje zhrnutie a ciele ďalšieho postupu, ktorý bude spočívať predovšetkým v hľadaní dôkazu konverencie „iteračného“ procesu, v implementovaní algoritmov do programovej realizácie a v štatistickom overení správnosti riešenia.

Autor

Kapitola 1

Reprezentácie kriviek

Krivky sú objekty, ktoré sa často používajú v počítačovej grafike a geometrickom modelovaní. Sú používané napr. pri vytváraní rôznych typov simulácií, pri určovaní tvarov iných objektov pomocou nich modelovaných, ale hlavne pri definovaní, modelovaní a modifikovaní telies. Existujú viaceré spôsoby, ako reprezentovať krivky. Kvôli počtu a rozmanitosti reprezentácií má každá z nich svoje výhody i nevýhody. Pre naše riešenia sa zameriame na jednu z najpoužívanejších reprezentácií kriviek, a to parametrickú reprezentáciu.

Definícia 1.1 Krivkou v E^2 nazývame množinu bodov

$$M = \{X \in E^2; X = f(t); t \in \langle a, b \rangle\},$$

kde $f: \mathbb{R} \rightarrow E^2$ je funkcia opisujúca krivku, t je (časový) parameter a $\langle a, b \rangle$ je interval, na ktorom je funkcia f definovaná.

Je zrejmé, že tvar a vlastnosti krivky sú určené výberom funkcie f a zároveň aj intervalu $\langle a, b \rangle$, t.j. definičnému oboru.

1.1 Analytické krivky

Analyticky môžeme krivku v E^2 so súradnicovou sústavou $\langle 0, x, y \rangle$ zadať :

- **Explicitne** vyjadrená krivka môže byť zadaná ako graf spojitej funkcie v tvare:

$$y = f(x), \quad x \in J \quad (1.1)$$

a býva orientovaná v smere rastúcej hodnoty x krivky ako funkcie. J predstavuje interval, na ktorom je funkcia definovaná.

- **Implicitne** zadávaná krivka má tvar

$$F(x, y) = 0. \quad (1.2)$$

- **Parametricky:** $x = x(t)$

$$y = y(t), \quad t \in J. \quad (1.3)$$

J predstavuje interval, na ktorom je funkcia definovaná.

1.2 Interpoláčné krivky

Zostrojenie interpolačnej krivky je založené na konštrukcii krivky, ktorá prechádza danými bodmi. V numerickej matematike sa na výpočet určitého integrálu používajú interpolácie pomocou polynómov. V počítačovej grafike sa pojem interpolácia používa na zostrojovanie kriviek pre zadané riadiace body, ktorými krivka prechádza. Problémom je určenie hodnoty parametra, pre ktorý získame daný riadiaci (určujúci) bod interpolačnej krivky. Najznámejšou interpolačnou krivkou je **Hermitova kubická splajnová krivka**. [5, str. 68-70]

1.3 Aproximačné krivky

Pre aproximačnú krivku máme opäť daných niekoľko bodov, ale nepožadujeme, aby všetky body krivka interpolovala. Základ konštruovania takýchto kriviek položili Bézier a Casteljau v rokoch 1959-62. V našej práci budeme používať pre reprezentovanie kriviek zápis

$$f(t) = \sum_{i=0}^n P_i \theta_i(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \quad i = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}$$

kde P_i predstavujú riadiace body, ktoré ovplyvňujú výsledný tvar krivky a funkcie $\theta_i(t)$ sú tvarovacie funkcie, ktoré určujú, ako príslušné riadiace body „pôsobia“ na tvar krivky. Riadiace body tvoria lomenú čiaru $P_0 P_1 \dots P_n$ nazvanú riadiaci polygón. Pretože body krivky majú tvar lineárnej kombinácie riadiacich bodov P_i , suma tvarovacích funkcií je rovná jednej, t.j. $\sum_{i=0}^n \theta_i(t) = 1$, pre všetky t . Tento typ krivky nám dáva dobré vlastnosti pre modelovanie a úpravu pre ďalšie použitie.

Do nasledujúcej práce sú zaradené ako aproximačné krivky Bézierove krivky, ktorých vlastnosti sú využité v algoritmoch pre vyšetrovanie prienikov čiar a pomocou ktorých dokážeme zistiť prieniky kriviek i vyšších stupňov ($n > 3$).

1.3.1 Bézierove krivky

Zamerajme sa na polynomicke krivky. Krivka v rovine je vyjadrená pomocou funkcií, ktorých súradnice sú polynomicke funkcie. Jej základné vyjadrenie je

$$f(t) = [a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0, b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0] = \\ = [a_n, b_n] t^n + \dots + [a_1, b_1] t + [a_0, b_0], [a_n, b_n] \neq [0, 0],$$

kde n je stupeň polynómu, tvarovacie funkcie sú $\theta_i(t) = t^i$ a riadiace body sú $P_i = [a_i, b_i]$ pre $i = 0, \dots, n$. Pretože nepoznáme presné vzťahy medzi tvarom riadiaceho polygónu a tvarom krivky, musíme skúmať tvarovacie funkcie, ktoré sú vhodné na modelovanie polynomických kriviek.

Definícia 1.2 Pre $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme $(n+1)$ Bernsteinových polynómov (funkcií) ako zobrazenie $B_{i,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ tak, že platí

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde $\binom{n}{i}$ sú kombinačné čísla vyjadrené rekuretné

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ak } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (0! = 1).$$

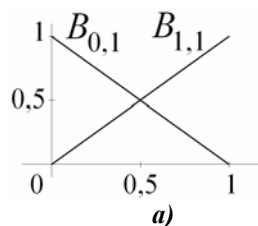
Vlastnosti Bernsteinových polynómov

(Bernsteinove polynómy stupňa n taktiež nazývame Bernsteinovými bázovými funkciami stupňa n (veta 1.2 vlastnosť 8); Bernsteinove polynómy sa prvýkrát objavili v dôkaze Weierstrassovej vety)

[15, str. 131-133]

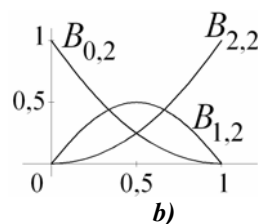
Grafy Bernsteinových polynómov pre $n = 1, 2, 3$:

$$n = 1 \quad B_{i,1}(t) = \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i} \\ B_{0,1}(t) = 1-t \\ B_{1,1}(t) = t$$



$$n = 2$$

$$B_{i,2}(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} \\ B_{0,2}(t) = (1-t)^2 \\ B_{1,2}(t) = 2t(1-t) \\ B_{2,2}(t) = t^2$$



$$n = 3$$

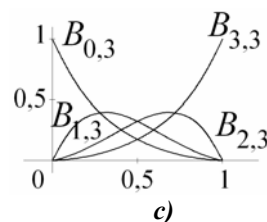
$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$



Obr. 1 Bernsteinove polynómy a) b) c)

Veta 1.2 Vlastnosti Bernsteinových polynómov:

(dôkazy sú uvedené v [17])

1. **Nezápornosť** $B_{i,n}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0,1 \rangle$

2. **Rozklad jednotky** $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ pre každé $t \in \langle 0,1 \rangle$

3. **$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$;** $B_{i,n}(0) = 0 \quad i=1, \dots, n$;
 $B_{i,n}(1) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$

4. **Symetria:** $B_{i,n}(1-t) = B_{n-i,n}(t) \quad i=0, \dots, n$

5. **Rekurzia (rekurentný vzorec)**

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t), \quad i=1, \dots, n,$$

kde $B_{-1,n-1}(t) = 0$; $B_{n,n-1}(t) = 0$

6. **Derivácie**

1. **derivácia:** $B'_{i,n}(t) = n \{ B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) \}$,

kde $B_{-1,n-1}(t) = 0$; $B_{n,n-1}(t) = 0$

2. **derivácia:** $B''_{i,n}(t) = n(n-1) \{ B_{i-2,n-2}(t) - 2B_{i-1,n-2}(t) + B_{i,n-2}(t) \}$,

kde $B_{-2,n-2}(t) = 0$; $B_{n,n-2}(t) = 0$

7. **Lokálne maximum**

Polynóm $B_{i,n}(t)$ má práve jedno lokálne maximum v $t = \frac{i}{n}$.

8. **Množina** $\{B_{i,n}(t), i = 0, \dots, n\}$ je **bázou vektorového priestoru** všetkých polynómov stupňa $\leq n$ (rádu $n+1$).

Vyjadríme $B_{i,n}(t)$ ako lineárne kombinácie $1, t, t^2, \dots, t^n$ a matica koeficientov je regulárna; Konverzia MONOMIÁLNA – BERNSTEINOVA BÁZA:

$$n = 1 \quad [1-t \ t] = [1 \ t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \quad [(1-t)^2 \ 2t(1-t) \ t^2] = [1 \ t \ t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 3$$

$$[(1-t)^3 \ 3t(1-t)^2 \ 3t^2(1-t) \ t^3] = [1 \ t \ t^2 \ t^3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_B}$$

Ďalej vyjadríme prvky monomiálnej bázy prvkami Bernsteinovej, pretože sú v praxi často používané; Konverzia BERNSTEINOVA – MONOMIÁLNA BÁZA:

$$n = 1 \quad [1 \ t] = [1-t \ t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \quad [1 \ t \ t^2] = [(1-t)^2 \ 2t(1-t) \ t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 3$$

$$[1 \ t \ t^2 \ t^3] = [(1-t)^3 \ 3t(1-t)^2 \ 3t^2(1-t) \ t^3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_B^{-1}}$$

Pretože matica M_B je trojuholníková i na diagonále sa nenachádza nula, matica M_B^{-1} bude existovať.

Keďže už poznáme vlastnosti Bernsteinových polynómov, môžeme pomocou nich definovať krivku, kde úlohu tvarovacích funkcií preberú samotné Bernsteinove polynómy.

Definícia 1.3 Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n \in E(E^2, E^3)$ je daná postupnosť bodov v rovine a funkcie $B_{i,n}(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ sú *Bernsteinove polynómy*. Potom krivku v $E(E^2, E^3)$, ktorej súradnice vyhovujú rovnici

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (1.4)$$

nazývame *Bézierovou krivkou n -tého stupňa*. Lomená čiara spájajúca body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sa nazýva *radiaci polygón Bézierovej krivky*.

Vlastnosti Bézierových kriviek

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\text{Maticový zápis: } \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \dots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix}$$

Parametrické vyjadrenie v 3D: $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) x_i \\ y(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) y_i \\ z(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) z_i \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Veta 1.3 Vlastnosti Bézierových kriviek:

I. Interpolácia koncových bodov radiaceho polygónu $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_n$:

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{V}_0 \quad \mathbf{B}(1) = \mathbf{V}_n \quad (\text{vlastnosť 3})$$

II. Konvexný obal²

Pre všetky $t \in \langle 0, 1 \rangle$ leží bod Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t)$ v konvexnom obale svojich radiacích vrcholov.

Dôkaz: vyplýva z definície konvexného obalu [kap. 2.1].

Ukážeme, že každý bod Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t)$ má tvar

$$a_0 \mathbf{V}_0 + \dots + a_n \mathbf{V}_n \quad \text{pre konštantné } a_i, \text{ kde } a_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i = 1 \quad \text{pre } i = 0, \dots, n.$$

Položme $a_i = B_{i,n}(t)$. Z vlastností Bernsteinových polynómov (veta 1.2)

$$\text{využijeme vlastnosti 1. a 2., t.j. } B_{i,n}(t) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad \text{pre } t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

potom bod ako lineárna kombinácia bodov s nezápornými koeficientmi je bod z konvexného obalu radiacích bodov Bézierovej krivky $\square$

² Z anglického *Convex Hull*

III. Vlastnosť nerastúcej variácie³

Pre rovinnú Bézierovu krivku $\mathbf{B}(t)$ je počet priesečníkov danej priamky s krivkou $\mathbf{B}(t)$ menší alebo rovný než počet priesečníkov spomínanej priamky s riadiacim polygónom Bézierovej krivky.

IV. Invariantnosť vzhľadom na

a) afinnú transformáciu T priestoru

$$T\left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)T(\mathbf{V}_i)$$

b) afinnú transformáciu parametra

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i = \sum_{i=0}^n B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\mathbf{V}_i, \quad u \in \langle a, b \rangle, t \in \langle 0, 1 \rangle$$

V. Pseudolokálne riadenie

Bernsteinov polynóm $B_{i,n}(t)$ má jediné lokálne maximum pre $t = \frac{i}{n}$. To znamená, že ak sa zmení jediný vrchol krivky $\mathbf{V}_i$, tak sa zmení len jediný člen analytického vyjadrenia krivky a to $B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i$. Tento sa však najviac zmení v okolí parametra $t = \frac{i}{n}$.

VI. Symetrickosť (súmernosť)

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t)\mathbf{V}_j = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(1-t)\mathbf{V}_{n-j}$$

VII. Derivácie Bézierovej krivky

$$1. \text{ derivácia: } \mathbf{B}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta \mathbf{V}_i, \text{ kde } \Delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$$

teda $\mathbf{B}'(t)$ je Bézierova krivka $(n-1)$ stupňa vo vektorovej zložke $E(E^2, E^3)$ s riadiacimi vrcholmi $n\Delta \mathbf{V}_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$2. \text{ derivácia: } \mathbf{B}''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i)$$

$$r. \text{ derivácia: } \mathbf{B}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^n B_{i,n-r}(t) \Delta^r \mathbf{V}_i,$$

$$\text{kde } \Delta^r \mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \mathbf{V}_{i+j}$$

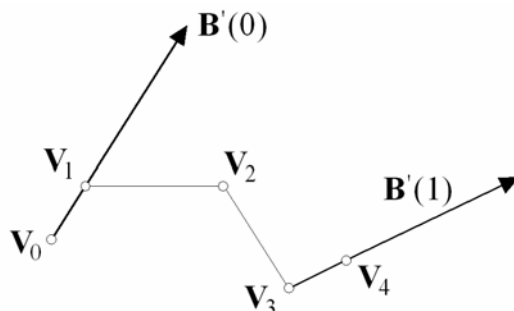
$$\text{Pre koncové body Bézierovej krivky } \mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i :$$

³ Z anglického *Variation Diminishing Property*

$$\mathbf{B}'(0) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(0) \Delta \mathbf{V}_i = n \Delta \mathbf{V}_0 = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{B}'(1) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(1) \Delta \mathbf{V}_i = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$$

Geometrická interpretácia 1. derivácie (vektor) v koncových bodoch: je rovnobežná s prvou resp. poslednou stranou riadiaceho polygónu $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{V}_n$.

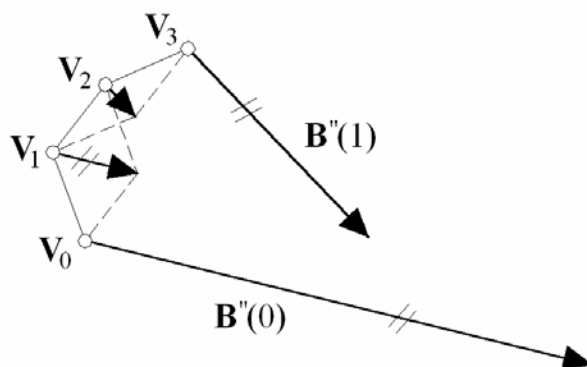


Obr. 2 Geometrická interpretácia prvej derivácie v koncových bodoch

$$\mathbf{B}''(0) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(0) = n(n-1)(\mathbf{V}_2 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{B}''(1) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(1) = n(n-1)(\mathbf{V}_{n-2} - 2\mathbf{V}_{n-1} + \mathbf{V}_n)$$

Geometrická interpretácia 2. derivácie (vektor) v koncových bodoch: druhá derivácia je rovnobežná s uhlopriečkou rovnobežníka vytvoreného tromi bodmi: $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$
 $\mathbf{V}_{n-2}, \mathbf{V}_{n-1}, \mathbf{V}_n$



Obr. 3 Geometrická interpretácia druhej derivácie v koncových bodoch

Bézierove krivky majú nevýhodu v tom, že pri zmene už len jedného vrcholu riadiacej lomenej čiary sa zmení celá Bézierova krivka, a teda bude výhodné pracovať aj s inými typmi kriviek, ktoré takéto „nedostatky“ nemajú, však nie je vylúčené, že sú bez akýchkoľvek nedostatkov. Pri štúdiu kriviek v CAGD sa najčastejšie stretávame so splajnovými krivkami.

Kapitola 2

Metóda Bézierovho orezávania

Bézierovo orezávanie (Bézier clipping) je iteratívna metóda vyšetrenia prieniku Bézierovej krivky s priamkou, resp. s inou Bézierovou krivkou. Táto metóda využíva vlastnosť konvexného obalu Bézierových kriviek a postupne iteratívne orezáva tie časti krivky, ktoré nepretínajú danú priamku. Metóda bola vyvinutá pre raytracing Bézierových plôch.

Výhody tejto metódy sú:

- *Aplikovateľnosť aj pre polynómy vyšších stupňov*
- *robustnosť*
- *nájdenie všetkých riešení*
- *rýchly test nepretínania sa*
- *pracovanie iba s lineárnymi rovnicami v každom kroku iterácie*

2.1 Konvexný obal

2.1.1 Motivácia

Tvar množiny bodov v rovine nesie subjektívny aspekt; pre danú množinu bodov môže každý vidieť iný tvar. Jedným z takýchto tvarov množiny bodov v rovine považujeme ich *konvexný obal*.

Konvexný obal si možno predstaviť ako gumené vlákno „natiahnuté“ okolo klinčekov zapichnutých v radiaciach vrcholoch Bézierovej krivky. Konvexný obal určíme ako uzavretý mnohoúhelník s jeho vnútrom, pozri [9, str. 25-48].

Definícia 2.1 *Konvexnou množinou alebo konvexným [geometrickým] útvarom budeme nazývať ľubovoľnú neprázdnu množinu bodov, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: pre každé dva rôzne body množiny patrí množine celá úsečka nimi určená.*

Definícia 2.2 *Nech je daná množina bodov M . Konvexným obalom množiny M nazývame najmenšiu (prieniť všetkých konvexných množín) konvexnú množinu, ktorá obsahuje danú množinu M .*

Definícia 2.3 *Nech je daná množina bodov $X = \{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ v $E(E^2, E^3)$. Konvexným obalom množiny X nazývame množinu bodov*

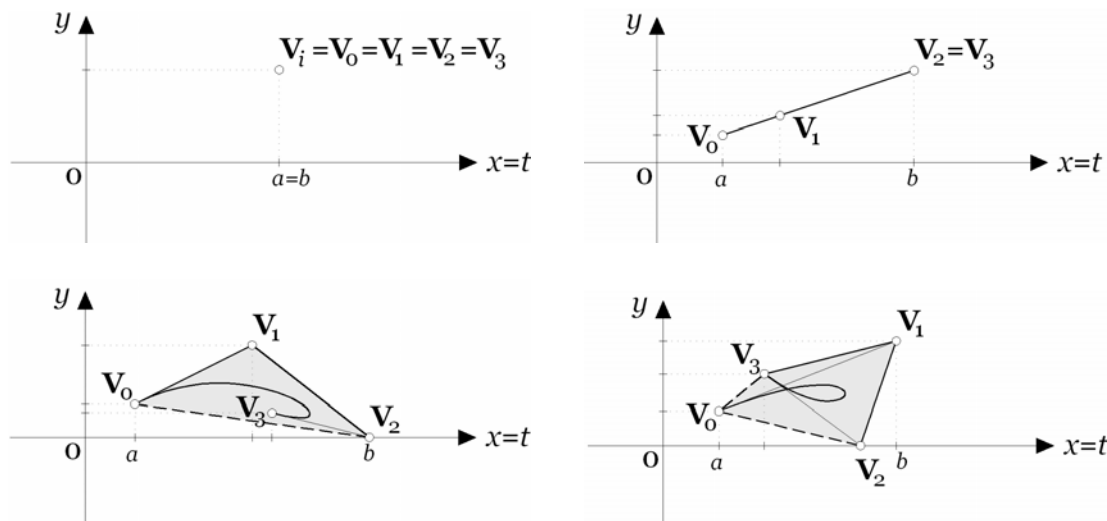
$$KO(X) = \left\{ a_0 x_0 + \dots + a_n x_n \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.1.2 Matematická reprezentácia konvexného obalu

Pretože budeme pracovať iba s konvexným obalom štyroch bodov riadiacej lomenej čiary, určíme konvexný obal Bézierovej krivky 3. stupňa nasledovne:

Veta 2.1 *Konvexný obal štyroch bodov vo všeobecnosti je konvexný štvoruholník, ktorého vrcholmi sú dané body a v špeciálnych prípadoch to môže byť trojuholník; ak sú body kolíneárne, môže to byť úsečka alebo bod.*

Konvexný obal štyroch bodov ilustrujeme na príkladoch, obr. 4.



Obr. 4 Konvexný obal štyroch bodov v rovine

2.2 Reparametrizácia ľubovoľného intervalu Bézierovej krivky

Výhodné je pracovať s Bézierovými krivkami na základe definície 1.3, kde „lokálny“ parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Avšak, vzhľadom na používaný „globálny“ parameter $u \in \mathbb{R}$, môžeme Bézierovu krivku písať v tvare pre tzv. iný $u \in \langle u_{\min}, u_{\max} \rangle$ ako $t \in \langle 0, 1 \rangle$ interval

$$\hat{\mathbf{B}}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i B_{i,n} \left(\frac{u - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} \right)$$

a nazývame to reparametrizáciou základnej Bézierovej krivky

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i B_{i,n}(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

2.3 Konverzie a inverzie medzi reprezentáciami

Najskôr si predpripravíme niektoré vzťahy využijúc už uvedené poznatky o Bézierových krivkách. Prepíšme vzťah (1.4) pre kubické Bézierove krivky v maticovom zápise

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(t) & B_{1,3}(t) & B_{2,3}(t) & B_{3,3}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Polynomicke krivky sú zvyčajne uvádzané ako kombinácie *monómov*, t.j. v prípade kubickej krivky $1, t, t^2, t^3$. Preto môžeme prepísať vzťah (2.1) takto

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \mathbf{V}_0 \cdot (1-t)^3 + \mathbf{V}_1 \cdot 3(1-t)^2 t + \mathbf{V}_2 \cdot 3(1-t)t^2 + \mathbf{V}_3 \cdot t^3 = \\ &= \mathbf{V}_0 + (-3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_1)t + (3\mathbf{V}_0 - 6\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_2)t^2 + (-\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_1 - 3\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)t^3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Použijeme znovu maticový zápis pre krivku $\mathbf{B}(t)$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Vzťahom (2.3) sme uviedli vyjadrenie Bézierovej kubiky v monomiálnom tvare. Budeme potrebovať dva prípady prepisu vyjadrenia krivky. Preto využívame dve možnosti vstupu:

- *krivka tretieho stupňa vyjadrená v monomiálnom tvare [podkapitola 2.3.1]*
- *krivka tretieho stupňa vyjadrená ako polynomická funkcia s parametrom t [podkapitola 2.3.2]*

2.3.1 Konverzia Bézierov – Monomiálny tvar (CBM)

Nech je krivka tretieho stupňa vyjadrená v monomiálnom tvare, môžeme písať

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.4)$$

Prvky $\mathbf{a}_i \in E^2$, $i = 0, 1, 2, 3$ nazveme *monomiálne riadiace body* [15, str. 156-158]. Toto vyjadrenie môžeme prepísať do maticového zápisu

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Porovnaním zápisov (2.3) a (2.5) dostávame

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix},$$

čo môžeme zapísať

$$\mathbf{a} = M_B \cdot \mathbf{V}, \quad (2.6)$$

kde M_B je matica koeficientov. Teda vstupnými údajmi sú súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výstupnými monomiálne riadiace body $\mathbf{a}_i$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výpočet (2.6) nazývame *konverziou Bézierovej krivky* zadanej svojimi riadiacimi vrcholmi *na krivku vyjadrenú v monomiálnom tvare*, ozn. *CBM*.

2.3.2 Konverzia Monomiálny - Bézierov tvar (CMB)

Ak potrebujeme vyjadriť riadiace vrcholy $\mathbf{V}_i$ Bézierovej kubiky pomocou monomiálnych riadiacich bodov $\mathbf{a}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ využijeme *konverziu Monomiálny – Bézierov tvar*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix},$$

čo možno zapísať

$$V = M_B^{-1} \cdot a, \quad (2.7)$$

kde M_B^{-1} je inverzná matica k matici M_B . Teda vstupnými údajmi sú v tomto prípade monomiálne riadiace body a_i a výstupnými súradnice riadiacich vrcholov V_i krivky $B(t)$ a výpočet (2.7) nazývame *konverziou krivky vyjadrenej v monomiálnom tvare na Bézierovu krivku*, ozn. **CMB**.

Prvky matíc M_B , M_B^{-1} vieme zapísať aj pomocou kombinačných čísel. Teda predchádzajúci text môžeme zhrnúť do vety 2.2.

Veta 2.2 Nech

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

a nech matice M_B , M_B^{-1} , sú definované nasledovne

$$M_B = M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{3}{i} \binom{i}{j} & \text{ak } i \geq j \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

$$M_B^{-1} = M_{i,j}^{-1} = \begin{cases} \frac{\binom{i}{j}}{\binom{3}{j}} & \text{ak } i \geq j \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

kde $0 \leq i, j \leq 3$. Teraz dostaneme vyjadrenie pre monomiálne riadiace body a_i a Bézierove riadiace vrcholy V_i

$$a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{3}{i} \binom{i}{j} V_j, \quad (2.8)$$

$$V_i = \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j}}{\binom{3}{j}} a_j.$$

2.3.3 Inverzia Bézierov – Polynomický tvar (IBP)

Nech je krivka tretieho stupňa vyjadrená ako graf polynomickej funkcie s parametrom t , môžeme písať

$$y = v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (2.9)$$

kde a_i sú skaláry. Krivka, ktorú sme zapísali v (2.9), môže byť myslená ako parametrická krivka [kap. 1.1] tvaru

$$y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad t \in J, \quad (2.10)$$

kde J predstavuje interval, na ktorom je funkcia definovaná. Zamerajme sa najskôr na parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$. V algoritmoch Bézierovho orezávania budeme pracovať s **funkcionálnou Bézierovou krivkou**, ktorá sa radí medzi neparametrické krivky. Pokúsme sa teraz prepísať Bézierovu kubiku do podoby funkcionálnej krivky 3. stupňa. Aby sme zapísali Bézierovu krivku vo funkcionálnom tvare, znížime prvú súradnicu tak, aby bola lineárne polynomická:

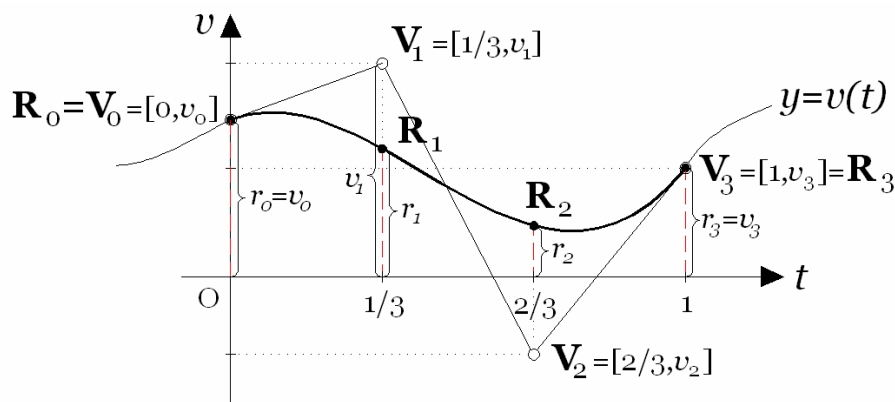
$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ v(t) \end{bmatrix}, \text{ pre } t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a $v(t) = v_0 B_{0,3}(t) + v_1 B_{1,3}(t) + v_2 B_{2,3}(t) + v_3 B_{3,3}(t)$, kde $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$, sú **Bézierove ordináty** (skalárne hodnoty). [5, str. 54-55]

Základné vyjadrenie Bézierovej krivky (1.4) definuje krivku, ktorá svoje riadiace body $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ len aproximuje. V našich aplikáciách vyžadujeme, aby Bézierova krivka prechádzala „presne“ cez zadané body, t.j. ich interpolovala.

Nech sú dané Bézierove riadiace body $\mathbf{V}_i[i/3, v_i]$, $i = 0, 1, 2, 3$ (obr. 5). Potrebujeme vyšetriť súradnice dátových bodov $\mathbf{R}_i[i/3, r_i]$ pomocou daných riadiacich bodov $\mathbf{V}_i$ na Bézierovej krivke. Tieto body $\mathbf{R}_i$ nech sú body krivky $\mathbf{B}(t)$ pre hodnoty rovnomerne rozmiestneného parametra t : $t_0 = 0, t_1 = 1/3, t_2 = 2/3, t_3 = 1$ (všeobecne ich prvá súradnica je $t_i = i/3$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$). Potom môžeme zapísať

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{B}(i/3) = \begin{bmatrix} i/3 \\ v_0 B_0^3(i/3) + v_1 B_1^3(i/3) + v_2 B_2^3(i/3) + v_3 B_3^3(i/3) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$



Obr. 5 Inverzia Bézierov – Polynomický tvar (IBP) a Polynomický – Bézierov tvar (IPB)

Vychádzajme zo vzťahu (2.3). Keďže parameter $t = i/3$, dostávame

$$\mathbf{B}\left(\frac{i}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{3} & \left(\frac{i}{3}\right)^2 & \left(\frac{i}{3}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

a pre $i = 0, 1, 2, 3$ dosadením do rovnosti (2.11) dostávame

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(0) \\ \mathbf{B}(\frac{1}{3}) \\ \mathbf{B}(\frac{2}{3}) \\ \mathbf{B}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

a môžeme písať

$$\mathbf{R} = I_{IBP} \cdot \mathbf{V}. \quad (2.14)$$

Vstupnými údajmi sú súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výstupnými body $\mathbf{R}_i = (\frac{i}{3}, r_i)$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výpočet (2.14) nazývame *inverziou Bézierovej krivky* zadanej svojimi riadiacimi vrcholmi *na krivku vyjadrenú ako polynomickeú funkciu*, ozn. *IBP*.

2.3.4 Inverzia Polynomickeý – Bézierov tvar (IPB)

Inverzný postup, v ktorom poznáme body $\mathbf{R}_i$ a chceme určiť body $\mathbf{V}_i$, môžeme zrealizovať

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-15}{18} & \frac{54}{18} & \frac{-27}{18} & \frac{6}{18} \\ \frac{6}{18} & \frac{-27}{18} & \frac{54}{18} & \frac{-15}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}$$

a možno písať

$$\mathbf{V} = I_{CBP}^{-1} \cdot \mathbf{R}. \quad (2.15)$$

Dostávame inverznú maticu $I_{CBP}^{-1} = I_{CPB}$ pre výpočet zvyšných neznámych vrcholov $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ Bézierovej krivky. Maticovú rovnosť (2.15) môžeme znovu zapísať ako sústavu rovností

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{V}_1 &= -\frac{15}{18}\mathbf{R}_0 + \frac{54}{18}\mathbf{R}_1 - \frac{27}{18}\mathbf{R}_2 + \frac{6}{18}\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{6}{18}\mathbf{R}_0 - \frac{27}{18}\mathbf{R}_1 + \frac{54}{18}\mathbf{R}_2 - \frac{15}{18}\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{R}_3. \end{aligned}$$

Teda vstupnými údajmi sú body $\mathbf{R}_i = (\frac{i}{3}, r_i)$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výstupnými súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výpočet (2.15) nazývame *inverziou krivky vyjadrenej ako polynomickeá funkcia na Bézierovu krivku*, ozn. *IPB*.

Priamo z (2.15) vyplýva, že pre prvé súradnice bodov $\mathbf{V}_i$ dávajú rovnosti hodnoty $i/3$, kde $i = 0, 1, 2, 3$. Teda výpočet sa zjednoduší na výpočet iba druhých súradníc bodov $\mathbf{V}_i$ a môžeme písať

$$\begin{aligned} v_0 &= r_0 \\ v_1 &= -\frac{15}{18}r_0 + \frac{54}{18}r_1 - \frac{27}{18}r_2 + \frac{6}{18}r_3 \\ v_2 &= \frac{6}{18}r_0 - \frac{27}{18}r_1 + \frac{54}{18}r_2 - \frac{15}{18}r_3 \\ v_3 &= r_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ak by sme uvažovali o krivke (ako polynomickej funkcii) na ľubovoľnom intervale $t \in \langle a, b \rangle$, hodnoty parametra t pre určovanie bodov $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ (a tým aj bodov riadiacej lomenej čiary $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$) nebudeme vyčísl'ovať pomocou $t_i = \frac{i}{3}$, kde

$i = \{0, 1, 2, 3\}$ ale hodnotu parametra určíme: $t_i = a + \frac{i(b-a)}{3}$ pre $i = \{0, 1, 2, 3\}$. Kon-

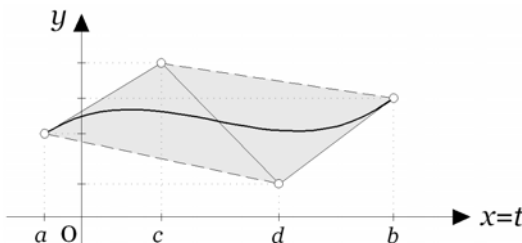
krétne pri Bézierovom orezávaní v E^2 [kap. 3.1] budeme pri každej iterácii danej krivky využívať metódu konverzie CPB pri výpočte druhých súradníc tých nezná-

mých vrcholov, ktoré odpovedajú hodnotám parametra $t_i = a + \frac{i(b-a)}{3}$, kde

$i = \{1, 2\}$, teda okrem prvého a posledného vrcholu, pretože tie sú dopredu známe. Je to rýchly a nenáročný výpočet, pri ktorom však nesmieme zabúdať na fakt, že vstupným intervalom je $t \in \langle a, b \rangle$, no neskôr sa $t \in \langle a_j, b_j \rangle \subset \langle a, b \rangle$, $j \in \{0, 1, \dots\}$. Pri delení intervalu $\langle a, b \rangle$ dostávame usporiadanú štvoricu hodnôt

$$\left\langle a, a + \frac{1 \cdot (b-a)}{3}, a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3}, b \right\rangle = \left\langle a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b \right\rangle = \langle a, c, d, b \rangle,$$

ako je uvedené na obrázku 6.



Obr. 6 Delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ polynomickej funkcie

2.4 Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2

Veta 2.3 Bod riadiaceho polygónu V_1 je priesečníkom priamky $m: x - 1/3 = 0$ s dotyčnicou n ku grafu funkcie $B(t)$ v bode V_0 .

Dôkaz: Derivácia krivky v bode V_0 (t.j. pre $t = 0$) má tvar

$$B'(0) = 3(V_1 - V_0).$$

Ak má bod V_1 incidovať s priamkou m , jeho prvá súradnica je tým jednoznačne určená; $v_1^x = 1/3$. Priamku n zapíšeme v parametrickom vyjadrení

$$n: X = V_0 + 3(V_1 - V_0)s,$$

kde $s \in \mathbb{R}$ a $(V_1 - V_0) = (1/3, v_1^y - v_0^y)$:

$$x = 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} s$$

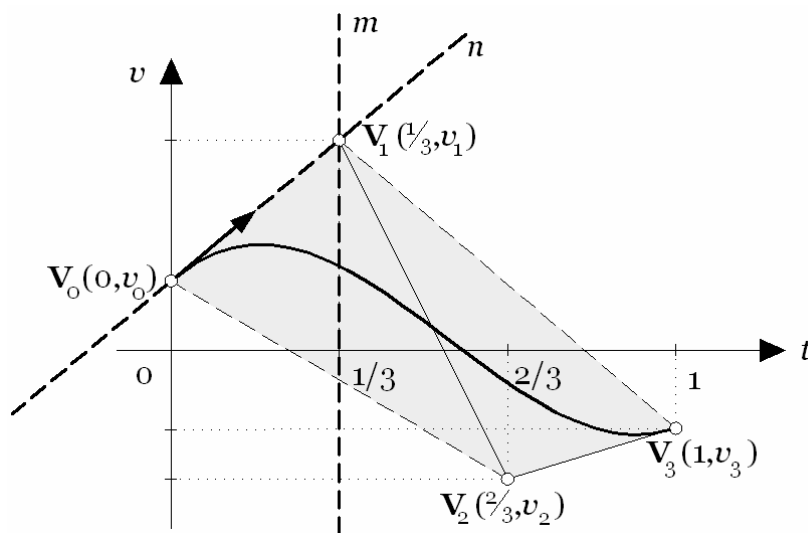
$$y = v_0^y + 3 \cdot (v_1^y - v_0^y) s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zistíme prienik priamok m, n

$$m \cap n: y = v_0^y + 3 \cdot (v_1^y - v_0^y) \cdot 1/3 = v_1^y$$

$$x = 1/3.$$

Bod so súradnicami $[1/3, v_1^y]$ je prienikom priamok m a n (obr.7). $\square$



Obr. 7 Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2

Analogicky sa dá dokázať nasledujúca veta.

Veta 2.4 Bod riadiaceho polygónu V_2 je priesečníkom priamky $p: x - 2/3 = 0$ s dotyčnicou q ku grafu funkcie $B(t)$ v bode V_3 .

Kapitola 3

Algoritmy Bézierovho orezávania

3.1 Korene polynómov

Problematika hľadania koreňov polynómov je založená na hľadaní prieniku osi t s grafom daného polynómu (polynomickej funkcie). Našou úlohou bude nájsť množinu všetkých koreňov využívajúc tzv. *metódu orezávania*⁴ konvexného obalu krivky (obr.13); pozri [16]. Krivka je zadaná ako polynomická funkcia parametrom t , t.j.

$$y = v(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n, \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Proces vyšetřovania koreňov polynómov uvedieme na príklade kubickej Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, pre $t \in \langle a, b \rangle$, teda aj polynomickej funkcie stupňa 3 ($v(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$).

Aby sme vylúčili tie prípady polôh kriviek, kedy nie je potrebné počítat' prienik krivky a priamky (parametrickej osi t), urobíme predspracovanie týmito dvomi testami.

Test A

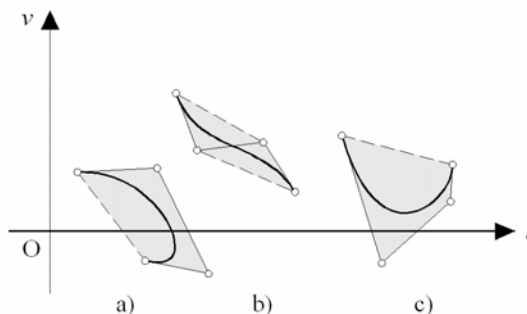
(vylúčenie prípadov metódou prieniku konvexného obalu Bézierovej krivky a parametrickej osi t)

Parametrická os t v rovine je daná rovnicou $y = 0$ a rozdeľuje rovinu na dve polroviny.

⁴ Z anglického *clipping*

Tvrdenie 3.1 Body $X = [x, y]$ roviny spĺňajúce podmienku $ax + by + c > 0$ patria jednej polrovine určenej priamkou $ax + by + c = 0$. Analogicky body spĺňajúce podmienku $ax + by + c < 0$, patria druhej polrovine.

Pre priamku $l: y = 0$, ak hodnoty druhých súradníc bodov $X = [x, y]$ sú všetky väčšie ako nula, patria jednej polrovine; ak sú všetky menšie ako nula, patria druhej polrovine. Na základe tohto tvrdenia vyriešime, či má krivka prienik s osou t . Ak všetky body $V_i = [x_i, y_i]$, $i \in 0, \dots, 3$ riadiaceho polygónu ležia v jednej polrovine, t.j. $\forall i: ax_i + by_i + c > 0$, resp. $\forall i: ax_i + by_i + c < 0$, os t nepretína konvexný obal riadiacich vrcholov krivky. Pretože krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov, os t nepretína ani krivku. V prípade, ak aspoň jeden bod riadiaceho polygónu krivky leží v opačnej polrovine (t.j. konvexný obal krivky má prienik s osou t), predpokladáme prienik samotnej krivky s danou osou t , hoci nemusí existovať. Týmto spôsobom vylúčime „nevhodné“ prípady. Na obr. 8b ilustrujeme vylúčený prípad.



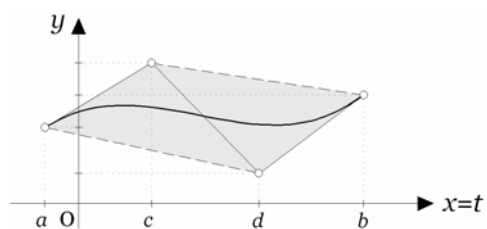
Obr. 8 Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky a parametrickej osi t
a, c) Možný prienik b) Vylúčený prípad

Test B

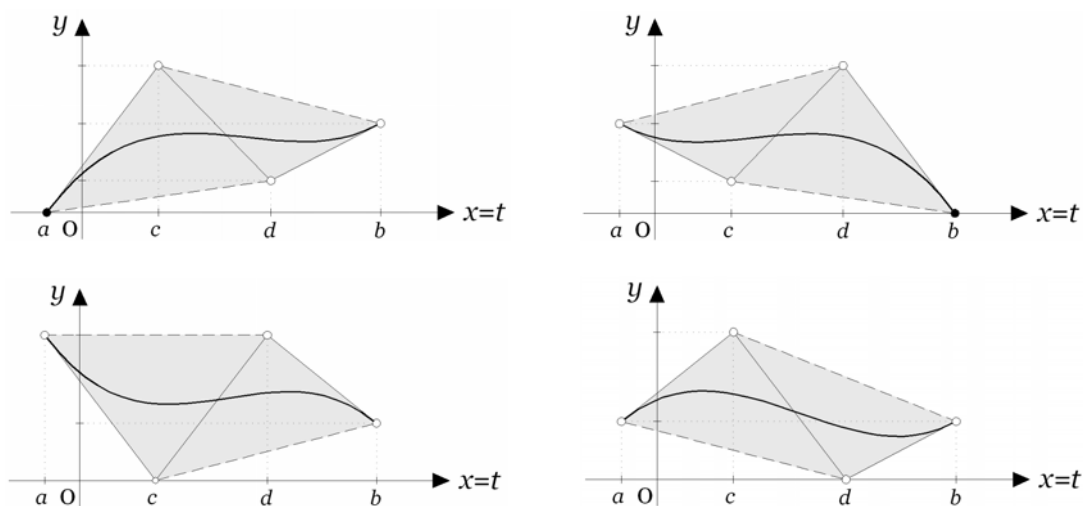
(prieniku konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t)

Test využíva, ako z názvu vyplýva, vlastnosť konvexného obalu Bézierových kriviek z vety 1.3.II. Na základe tejto vlastnosti vieme zistiť, v ktorých prípadoch krivka určite nepretína os t , resp. ak pretína, tak s istotou dokážeme vyriešiť iba prípady, keď prienikom konvexného obalu s osou t je začiatočný alebo koncový bod riadiacej lomennej čiary, a teda aj bod krivky. Na obrázkoch 9 – 11 sú ilustrované niektoré prípady, konkrétne tie, pre ktoré konvexný obal pretína os t v špecifickej oblasti, a to napr. vo vrcholoch, stranách konvexného obalu a niektorých úsečkách tvorených vrcholmi konvexného obalu. Konvexný obal riadiacich vrcholov Bézierovej krivky označíme KO. Pre Bézierovu kubiku môžu nastať nasledovné prípady:

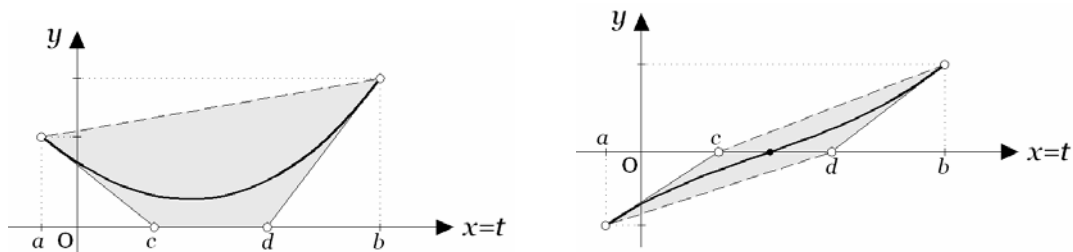
- ak $KO \cap t = \emptyset \Rightarrow$ krivka nepretína os t , t.j. $B(t) \cap t = \emptyset$

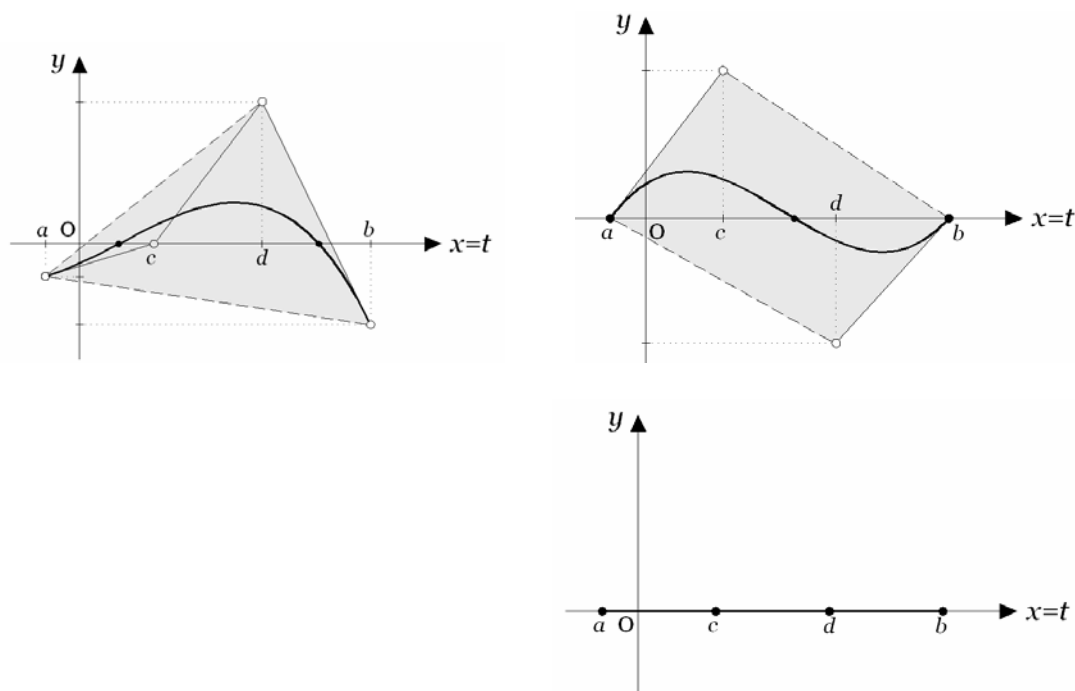

 Obr. 9 Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – prázdna množina

- ak $KO \cap t = \{V_i\}$, $i \in \{0, \dots, 3\}$, tak $\begin{cases} \text{pre } i=1 \vee i=2 \Rightarrow \mathbf{B}(t) \cap t = \emptyset \\ \text{pre } i=0 \vee i=3 \Rightarrow \mathbf{B}(t) \cap t = \{t_i\} \end{cases}$


 Obr. 10 Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – jeden bod

- ak $KO \cap t = \text{úsečka } PQ \Rightarrow \mathbf{B}(t) \cap t$ môže byť $\emptyset$, $\{t_1, t_2, t_3\}$, $\{t_1, t_2\}$, $\{t_1\}$, $\langle a, b \rangle$, kde $t_1, t_2, t_3 \in \langle a, b \rangle$




 Obr. 11 Prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t – úsečka

Vráťme sa späť k vyšetrovaniu koreňov polynómov. Postup vyšetrovania koreňov spracujeme vo forme algoritmu. Nech sú dané:

- polynóm definovaný funkcionálnou rovnicou

$$y = v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in \langle a, b \rangle$$

- parametrická os t rovnicou

$$y = 0 \quad (\text{obr. 12})$$

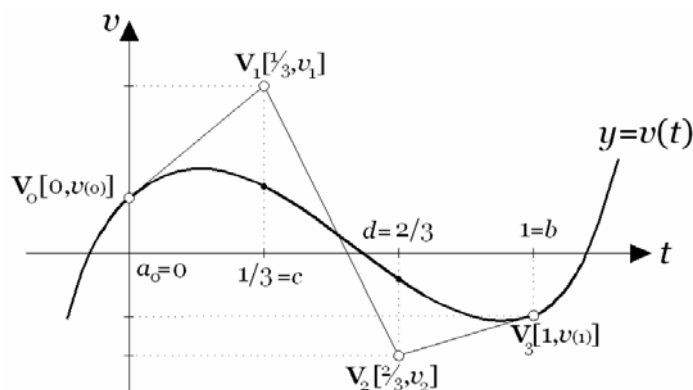
PT algoritmus (Polynom-Parametric axis t algorithm):

1. Určenie vrcholov riadiacej lomenej čiary pre $t_0 = a$ a pre $t_3 = b$:

$\mathbf{V}_0 = [a, v(a)]$, $\mathbf{V}_3 = [b, v(b)]$ a algoritmom CPB vypočítame zvyšné Bé-

zierove riadiace vrcholy $\mathbf{V}_1 = \left[\frac{2a+b}{3}, v_1 \right]$, $\mathbf{V}_2 = \left[\frac{a+2b}{3}, v_2 \right]$ pre

$$t_1 = \frac{2a+b}{3}, \quad t_2 = \frac{a+2b}{3}$$


 Obr. 12 Zadanie CL algoritmu a konverzia CPB pre t intervalu $\langle a, b \rangle$

2. Určenie konvexného obalu krivky $\mathbf{B}(t)$
3. Test A
(vylúčenie „nevhodných“ prípadov metódou prieniku konvexného obalu Bézierovej krivky a parametrickej osi t)
4. Test B
(prienik konvexného obalu Bézierovej krivky s osou t)
Ak $KO \cap t$ je úsečka PQ ,

tak body P, Q ležia na priamke t a majú súradnice $P = [t_{\min}, 0]$,
 $Q = [t_{\max}, 0]$ a prejsť na krok 5,

inak ak $KO \cap t$ je bod $V_i, i \in \{0, \dots, 3\}$,

tak ak $i = 0 \vee i = 3$,

tak $\mathbf{B}(t) \cap t = \{t_i\}$,

inak $\mathbf{B}(t) \cap t = \emptyset$

inak $\mathbf{B}(t) \cap t = \emptyset$ a algoritmus skončí.

5. Pre hodnoty $t_{\min}, t_{\max}$, vyčíslit' body odpovedajúce na krivke $\mathbf{B}(t_{\min})$,
 $\mathbf{B}(t_{\max})$ zadanej krivky $\mathbf{B}(t)$. Dostávame novú „orezanú“ krivku.
6. Test C
(percentuálne porovnanie zmeny novovzniknutého intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ voči pôvodnému $\langle a, b \rangle$, resp. predchádzajúcemu intervalu) ⁵

⁵ Inak povedané, ak sa pri opakovanom orezávaní nezmenil predchádzajúci interval $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ voči novovzniknutému o viac ako napr. 15%, môžeme predpokladať viac koreňov polynómu. Vtedy sa pre hodnotu parametra $t_0 = |t_{\max} - t_{\min}|/2$ interval rozdelí na 2 menšie intervaly a pokračujeme s orezávaním pre každú časť samostatne.

Ak $|t_{\max} - t_{\min}| \leq \delta |b - a|$,

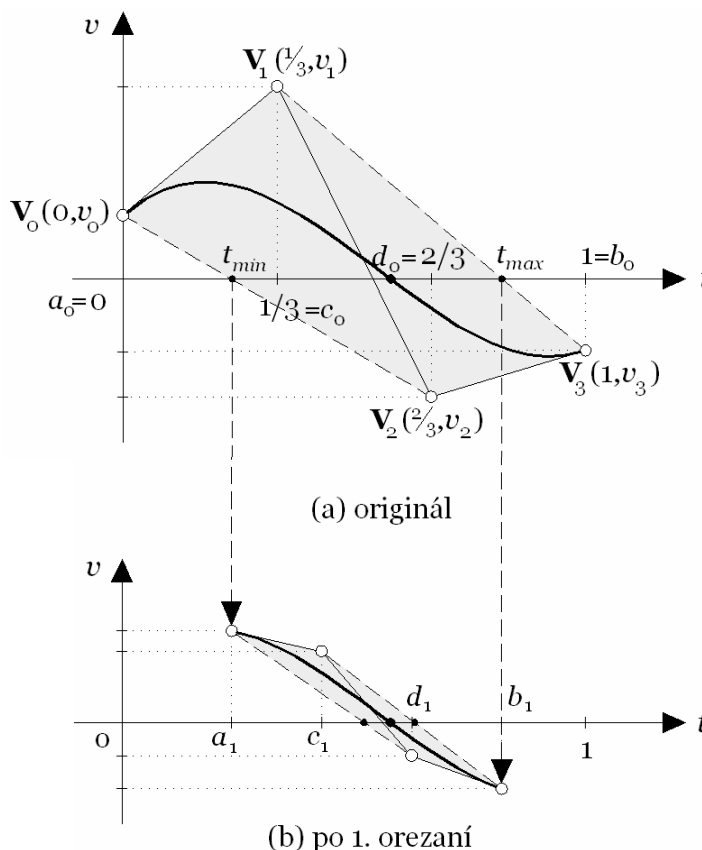
tak chod' na krok 7,

inak pre $t_0 = \frac{|t_{\max} - t_{\min}|}{2}$ rozdeľ Bézierovu krivku $\mathbf{B}(t)$ na dve nové

Bézierove krivky $\mathbf{B}^1(t)$, $t \in \langle t_{\min}, t_0 \rangle$, $\mathbf{B}^2(t)$, $t \in \langle t_0, t_{\max} \rangle$ a späť na krok 1 pre obidve nové krivky.

7. Späť na krok 2. *PT algoritmus* sa zastaví, keď vzdialenosť $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$.

Parametre δ , ε sú dopredu pevne zvolené, napr. vzdialenostný parameter intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ po orezaní môže mať hodnotu $\varepsilon = 0,005$ a parameter percentuálnej zmeny novovzniknutého intervalu voči predchádzajúcemu $\delta = 0,85$. Hodnoty parametrov sú zatiaľ odhadnuté. Ich presnejšie odhady budú známe až po experimentálnej časti projektu.



Obr. 13 PT algoritmus

Musíme pripomenúť, že výstupnými hodnotami *PT algoritmu* sú najviac tri (0 až 3) korene polynómu. Pretože algoritmus dáva pri každom orezaní ako návratovú hodnotu interval $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$, skutočnosť, že nastane situácia, keď $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$, bu-

deme považovať za cieľovú a ako približnú hodnotu koreňa polynómu prehlásime stred intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$.

3.2 Prieniky typu KRIVKA – PRIAMKA

Problém vyšetovania prieniku priamky s krivkou sa budeme snažiť previesť na typ úlohy hľadania koreňov polynómov. Základným krokom algoritmu bude vytvorenie „novej“ Bézierovej krivky; presnejšie budeme určovať jej riadiace vrcholy $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{3}, d_i \right]$, $i = 0, 1, 2, 3$ tak, že súradnica d_i bude vyjadrovať orientovanú vzdialenosť riadiaceho vrcholu $\mathbf{V}_i$ od priamky. Samozrejme, aj tu uvádzame príklad Bézierovej kubiky.

Nech je daná Bézierova krivka $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x, v_i^y]$,

$t \in \langle 0, 1 \rangle$, teda jej parametrické vyjadrenie

$$x(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^x, \quad y(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^y \quad (3.1)$$

a nech priamka l je zadaná implicitne

$$l: ax + by + c = 0.$$

Koeficienty a, b, c sú upravené tak, aby platilo $a^2 + b^2 = 1$, t.j. rovnica priamky l je upravená na normovaný tvar (normálový vektor (a, b) upravíme na jednotkový).

Vyšetríme bod na Bézierovej krivke tak, aby zároveň patril priamke l , t.j. bod, ktorý má od priamky l nulovú vzdialenosť. Pre každý bod krivky vieme vyjadriť jeho orientovanú vzdialenosť

$$d(t) = ax(t) + by(t) + c \quad (3.2)$$

Po dosadení parametrických rovníc (3.1) Bézierovej krivky do (3.2) dostávame

$$\begin{aligned} d(t) &= a \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^x + b \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^y + c \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^3 (av_i^x + bv_i^y + c) B_{i,3}(t) = \sum_{i=0}^3 d_i B_{i,3}(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde

$$d_i = av_i^x + bv_i^y + c \quad (3.4)$$

Funkciu $d(t)$ nazývame *vzdialenostnou funkciou* a je to vlastne *Bézierova funkcia* tretieho stupňa.

Pre výpočet orientovanej vzdialenosti bodu od priamky sa používa vzťah

$$d_i = \frac{av_i^x + bv_i^y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.5)$$

V našom prípade je $a^2 + b^2 = 1$, preto (3.4) bude určovať *orientovanú vzdialenosť* d_i *radiaceho vrcholu* $\mathbf{V}_i$ *od priamky* l . Predchádzajúci postup dokazuje platnosť nasledujúcej lemy.

Lema 3.1 Pre orientovanú vzdialenosť $d(t)$ bodu $\mathbf{B}(t) = [x(t), y(t)]$ Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x, v_i^y]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ od priamky

$$l: ax + by + c = 0 \text{ platí } d(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) d_i,$$

$$\text{kde } d_i = \frac{av_i^x + bv_i^y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, i \in 0, \dots, 3$$

je orientovaná vzdialenosť bodu $\mathbf{V}_i$ od priamky l . Teda funkcia $d(t)$ je kubická Bézierova polynomická funkcia.

Veta 3.1 Bod $\mathbf{B}(t)$ Bézierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x, v_i^y]$,

$t \in \langle 0, 1 \rangle$ je priesečníkom krivky s priamkou $l: ax + by + c = 0$ práve vtedy, keď číslo $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je koreňom vzdialenostnej funkcie $d(t)$.

Dôkaz. Veta je zrejším dôsledkom lemy 3.1.

Pri vyšetrowaní prieniku krivky a priamky budeme určovať hodnotu parametra t (ak existuje), pre ktorú $d(t) = 0$, t.j. „vzdialenosť“ bodu $\mathbf{B}(t)$ od priamky l je nulová. Znamená to využiť *PT algoritmus*.

Ku konštrukcii algoritmu krivka - priamka (*CL algoritmus*) zadáme dátové vstupné hodnoty:

- Bézierova krivka $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x, v_i^y]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$

(Poznámka: Ak je zadaná iná reprezentácia krivky ako Bézierova, prekonvertujeme danú reprezentáciu na Bézierovu formu.)

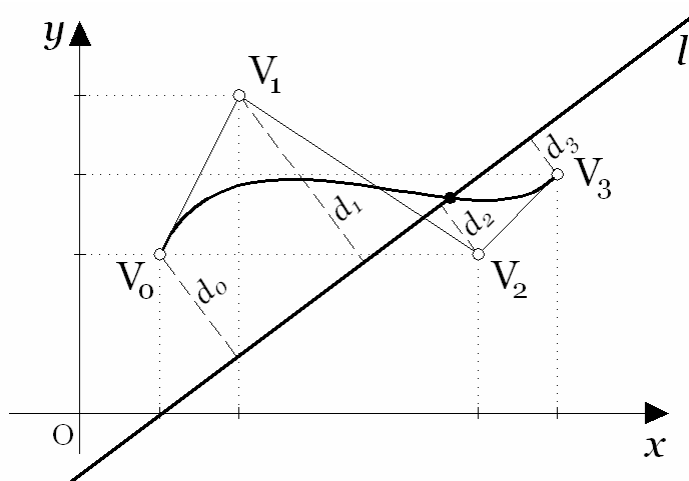
- priamka l implicitnou rovnicou

$$\ell: ax + by + c = 0$$

v normovanom tvare, t.j. koeficienty a , b , c sú modifikované na formu $a^2 + b^2 = 1$ (obr. 14)

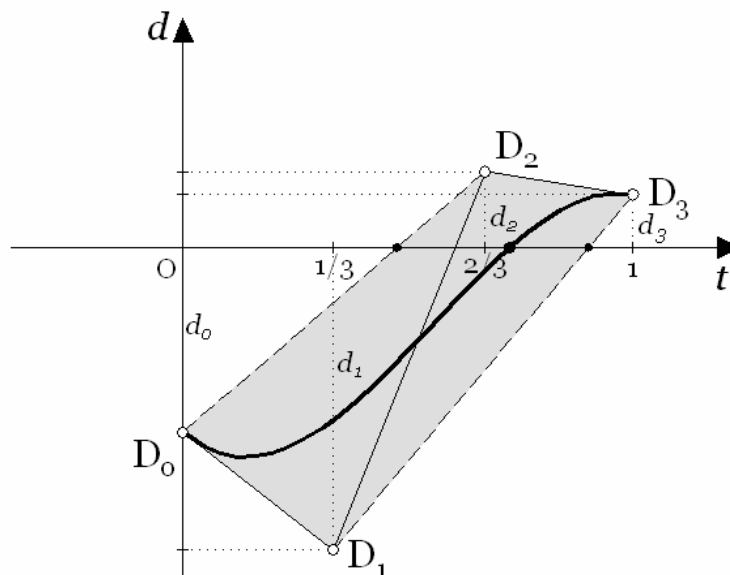
CL algoritmus (Curve-Line algorithm):

1. Vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i (3.4) radiacích vrcholov Bézierovej krivky od danej priamky l (obr. 14 - d_0, d_1, d_2, d_3)



Obr. 14 Zadanie CL algoritmu a vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i pre vrcholy Bézierovej kubiky

2. Určenie riadiacich vrcholov D_0, D_1, D_2, D_3 novej krivky, kde $D_i = \left[\frac{i}{3}; d_i \right]$ pre $i = 0, 1, 2, \dots, 3$.
3. *PT algoritmus* pre funkciu $d(t)$ (obr. 15 ilustruje výsledok *PT algoritmu*)

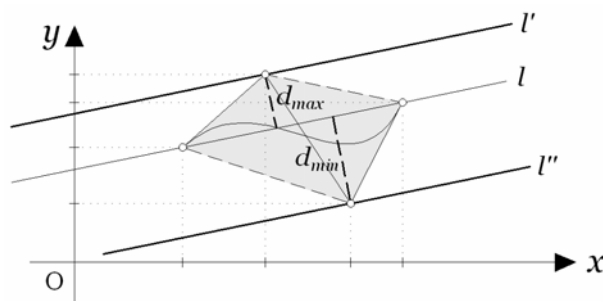


Obr. 15 Výsledok CL algoritmu

3.3 Prieniky typu KRIVKA – KRIVKA

Hlavným krokom pripravovaného algoritmu bude transformácia úlohy *prieniku typu krivka - krivka* na typ úlohy *prieniku priamka – krivka*, čo urýchli čas výpočtu algoritmu. Druhým dôležitým krokom je zostrojenie *hrubej priamky*⁶. Určíme ju podľa nasledovnej definície.

Definícia 3.1 *Hrubou priamkou* Bézierovej krivky v E^2 nazývame každý rovinný pás, v ktorom ležia všetky body krivky, pričom hraničné priamky pásu sú rovnobežné s priamkou spájajúcou prvý a posledný vrchol riadiaceho polygónu krivky. (obr. 16)



Obr. 16 Hrubá priamka krivky

Podľa definície 3.1 má Bézierova krivka nekonečne veľa hrubých priamok. Naším cieľom je skonštruovať čo možno „najúžšiu“.

3.3.1 Konštrukcia hrubej priamky

Nech sú v rovine dané riadiace body V_0, V_1, V_2, V_3 Bézierovej krivky. Zostrojme priamku l spájajúcu prvý bod V_0 a posledný bod V_3 riadiaceho polygónu. Priamka⁷ $l = V_0V_3$ má normovanú rovnicu $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$. Pre každý vrchol riadiacej lomenej čiary použijeme vzťah (3.4) na výpočet orientovanej vzdialenosti d_i bodu V_i od priamky l ; dostávame množinu čísel $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$. Z tejto množiny vyberieme minimálnu a maximálnu hodnotu

$$d_{\min} = \min \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$$

$$d_{\max} = \max \{d_0, d_1, d_2, d_3\}.$$

Veta 3.2 Hrubá priamka krivky $\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) V_i$ je množina bodov $X \in E^2$, pre ktoré

⁶ Z anglického *Fat Line*

⁷ V prípade, že $V_0 = V_3$, za priamku l prehlásime priamku rovnobežnú s osou x a prechádzajúcu bodom $V_0 = V_3$.

$$d_{\min} \leq d_X \leq d_{\max},$$

kde d_X je orientovaná vzdialenosť bodu X od priamky l .

Veta 3.3 Ak má priamka $l = \mathbf{V}_0 \mathbf{V}_3$ normovanú rovnicu $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 = 1$), tak hraničné priamky l' a l'' hrubej priamky krivky zostrojíme tak, aby boli rovnobežné s priamkou l a ich orientovaná vzdialenosť od priamky l je $d_{\min}$, $d_{\max}$ a ich rovnice sú

$$l': ax + by + c + d_{\max} = 0$$

$$l'': ax + by + c + d_{\min} = 0.$$

Takto zostrojená hrubá priamka (rovinný pás s hraničnými priamkami l' , l'') obsahuje všetky body konvexného obalu Bézierovej krivky. Pripomíname, že veta 3.2 platí pre Bézierovu krivku ľubovoľného stupňa.

Pre kvadratickú a kubickú Bézierovu krivku však vieme určiť ešte užší rovinný pás $l'l''$. Jeho výhodou je urýchlenie algoritmu vyšetrenia prieniku dvoch Bézierových kriviek, pozri [14, str. 26-28].

3.3.2 Kvadratická Bézierova krivka a jej užšia hrubá priamka

Pozrime sa na orientované vzdialenosti bodov kvadratickej Bézierovej krivky. Vychádzajme zo vzťahu (3.3) vzdialenostnej funkcie a prepíšme ho pre kvadratickú Bézierovu krivku

$$d(t) = \sum_{i=0}^2 (av_i^x + bv_i^y + c) B_{i,2}(t) = \sum_{i=0}^2 d_i B_{i,2}(t).$$

Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ sú riadiace body Bézierovej krivky. Určme vzdialenostnú funkciu

$$d(t) = d_0 B_{0,2}(t) + d_1 B_{1,2}(t) + d_2 B_{2,2}(t).$$

Hodnoty $d_0 = d_2 = 0$, pretože riadiace vrcholy $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_2$ sú bodmi priamky l , a teda môžeme zapísať

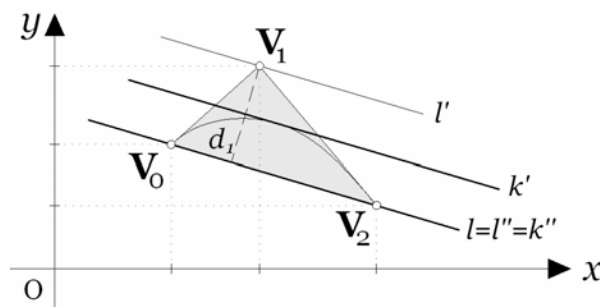
$$d(t) = d_1 B_{1,2}(t) = d_1 2t(1-t).$$

Nájdением extrémov kvadratickej funkcie $d(t)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ získame hodnoty

$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{d_1}{2} \right\}$$

$$d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{d_1}{2} \right\},$$

ktorými vieme ohraničiť rovinný pás $k'k''$ užší než hrubá priamka z vety 3.3 (obr. 17).



Obr. 17 Užšia hrubá priamka kvadratickej Bézierovej krivky

3.3.3 Kubická Bézierova krivka a jej užšia hrubá priamka

Vychádzajme znovu zo vzťahu (3.3) pre vyjadrenie orientovaných vzdialeností a zapíšme vzdialenostnú funkciu pre kubickú Bézierovu krivku

$$d(t) = \sum_{i=0}^3 d_i B_{i,3}(t), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Nech V_0, V_1, V_2, V_3 sú riadiace body Bézierovej krivky. Určme vzdialenostnú funkciu

$$d(t) = d_0 B_{0,3}(t) + d_1 B_{1,3}(t) + d_2 B_{2,3}(t) + d_3 B_{3,3}(t).$$

Hodnoty $d_0 = d_3 = 0$, pretože riadiace vrcholy V_0, V_3 sú bodmi priamky l a teda môžeme zapísať

$$d(t) = d_1 B_{1,3}(t) + d_2 B_{2,3}(t),$$

teda

$$d(t) = d_1 3t(1-t)^2 + d_2 3t^2(1-t) = 3t(1-t) [d_1(1-t) + d_2 t].$$

Tu už musíme uvažovať dva prípady pre orientované vzdialenosti d_1, d_2

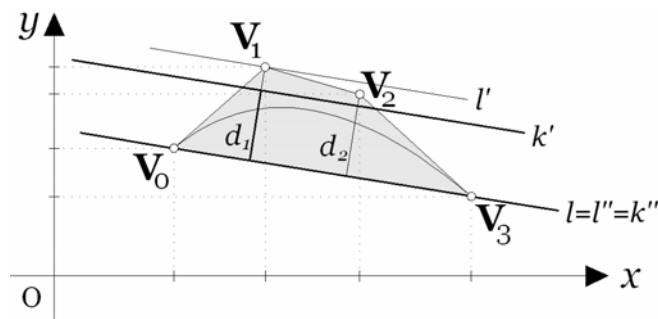
- ak $d_1 d_2 > 0$, t.j. body V_1, V_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na l , dostávame

$$\min\{0, d_1, d_2\} \leq (1-t)d_1 + td_2 \leq \max\{0, d_1, d_2\}$$

$$\text{a} \quad 3t(1-t) \min\{0, d_1, d_2\} \leq d(t) \leq 3t(1-t) \max\{0, d_1, d_2\}.$$

Nájďme extrém funkcie $h(t) = 3t(1-t)$. Funkcia $h(t)$ má extrém pre $t = \frac{1}{2}$ a nadobúda hodnotu $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Rovinný pás $k'k''$ vieme ohraničiť týmito hodnotami

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min\left\{0, \frac{3}{4}d_1, \frac{3}{4}d_2\right\} \\ d_{\max} &= \max\left\{0, \frac{3}{4}d_1, \frac{3}{4}d_2\right\} \end{aligned} \quad (\text{obr. 18})$$



Obr. 18 Užšia hrubá priamka kubickej Bézierovej krivky pre vrcholy Bézierovej krivky ležiace v jednej polrovine

- ak $d_1 d_2 \leq 0$, t.j. body V_1, V_2 ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na l , uvažujme prípad keď $d_1 \leq 0, d_2 \geq 0$

$$(1-t)d_1 \leq (1-t)d_1 + td_2 \leq td_2$$

$$\text{a} \quad 3t(1-t)^2 d_1 \leq d(t) \leq 3t^2(1-t)d_2$$

Nájďme extrémny funkcií $m(t) = 3t(1-t)^2$, $n(t) = 3t^2(1-t)$. Funkcia $m(t)$ má extrémny pre $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{3}$ a nadobúda v nich hodnoty $m(0) = 0$, $m(\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$ a funkcia $n(t)$ má extrémny pre $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{2}{3}$ a nadobúda v nich hodnoty $n(0) = 0$, $n(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$. Z toho vyplýva

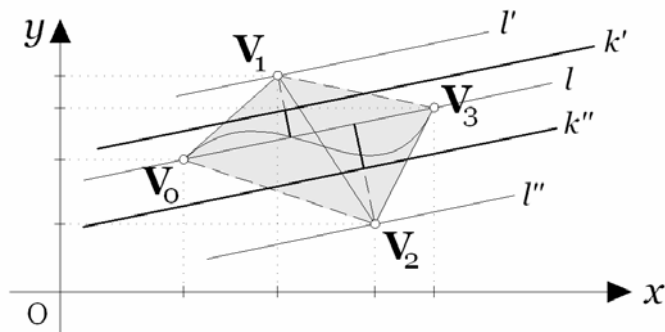
$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1 \right\}, \quad d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{4}{9} d_2 \right\}.$$

Analogicky pre $d_1 \geq 0, d_2 \leq 0$ dostávame

$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{4}{9} d_2 \right\}, \quad d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1 \right\}.$$

Takže môžeme písať spoločne pre $d_1 d_2 \leq 0$

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1, \frac{4}{9} d_2 \right\} \\ d_{\max} &= \max \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1, \frac{4}{9} d_2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{obr. 19})$$



Obr. 19 Užšia hrubá priamka kubickej Bézierovej krivky pre vrcholy Bézierovej krivky ležiace v opačných polrovinách

Teraz pristúpime k vyšetrovaniu spoločných bodov dvoch Bézierových kriviek v rovine. Navrhujeme striedavo orezávať jednu krivku hrubou priamkou druhej krivky, prvú krivku môže pretnúť iba tá časť druhej, ktorá leží v hrubej priamke prvej krivky.

Podobne ako pri predchádzajúcom algoritme prieniku priamky s krivkou využijeme vzdialenostnú funkciu vrcholov radiaceho polygónu Bézierovej krivky od pevne zvolenej priamky a následne zavedieme novú Bézierovu krivku. Je to kvôli tomu, že funkcia $d(t) = \sum_{i=0}^3 d_i B_{i,3}(t)$ je polynomická funkcia v Bernsteinovom tvare a môžeme ju reprezentovať ako Bézierovu krivku v tvare

$$\mathbf{D}(t) = (t, d(t)) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{D}_i B_{i,3}(t), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

s riadiacimi vrcholmi $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{3}; d_i \right]$, pozri [14, str. 28-29].

Keďže budeme pracovať aj s orezávaním konvexného obalu, môžeme hovoriť, že *CC algoritmus* je spojením *algoritmov PT* a *CL*. Aby sme vylúčili tie prípady polôh kriviek, kedy nie je potrebné počítat prienik kriviek, urobíme predspracovanie nasledovným testom.

Test D

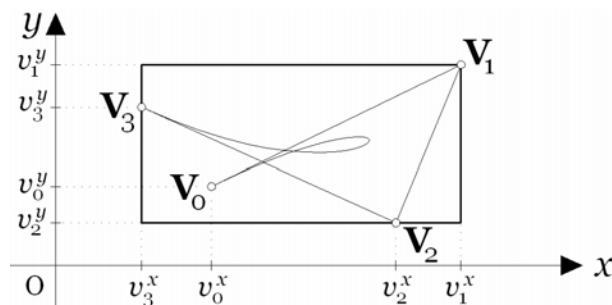
(nepretínanie sa konvexných obalov dvoch Bézierových kriviek pomocou minmax obalov⁸)

Jednoduchou metódou na zistenie, či sa konvexné obaly dvoch Bézierových kriviek pretínajú, je využitie minmax obalov.

Definícia 3.2 Nech je daná krivka $\mathbf{B}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. *Minmax obalom* nazveme najmenší axiálny rovnobežník, ktorý obsahuje konvexný obal krivky $\mathbf{B}(t)$.

⁸ Z anglického *Minmax bounding box*

To znamená, že jeho ľavý dolný roh má súradnice $(x_{\min}, y_{\min})$ a pravý horný roh $(x_{\max}, y_{\max})$, pričom $x_{\min}$ resp. $x_{\max}$ je minimálna resp. maximálna hodnota x súradníc a $y_{\min}$ resp. $y_{\max}$ je minimálna resp. maximálna hodnota y súradníc všetkých vrcholov riadiaceho polygónu (obr. 20), pozri [15, str. 146-147]. Po jeho vytvorení môžeme v krátkom čase zistiť prienik minmax obalov dvoch kriviek.



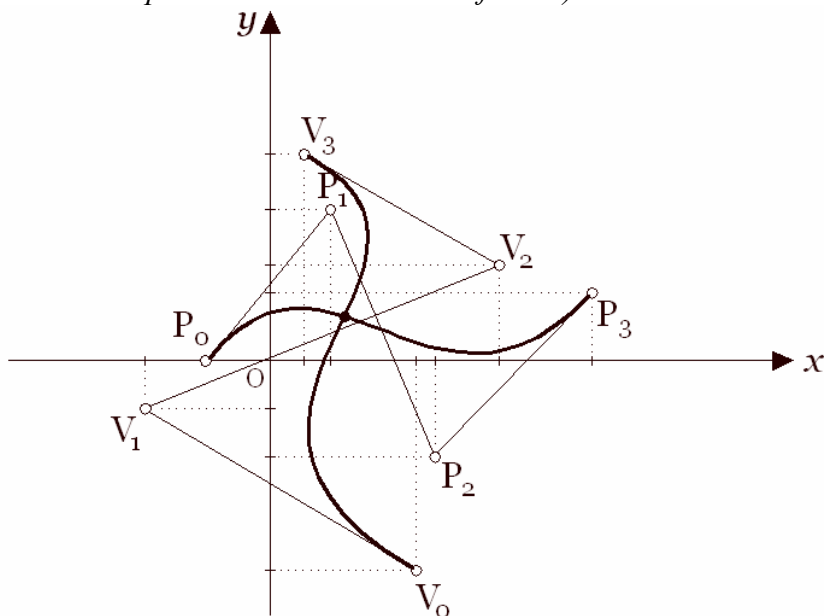
Obr. 20 Minmax obal

Teraz sa zamerajme na konštrukciu algoritmu prieniku dvoch Bézierových kriviek, pričom využijeme metódu hrubej čiary. Nech sú dané krivky svojimi riadiacimi vrcholmi:

$$\bullet \quad \mathbf{V}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

$$\mathbf{P}(s) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(s) \mathbf{P}_i, \quad s \in \langle m, n \rangle \quad (\text{obr. 21}).$$

(Poznámka: Ak je daná iná reprezentácia krivky ako Bézierova, prekonvertujeme danú reprezentáciu na Bézierovu formu.)



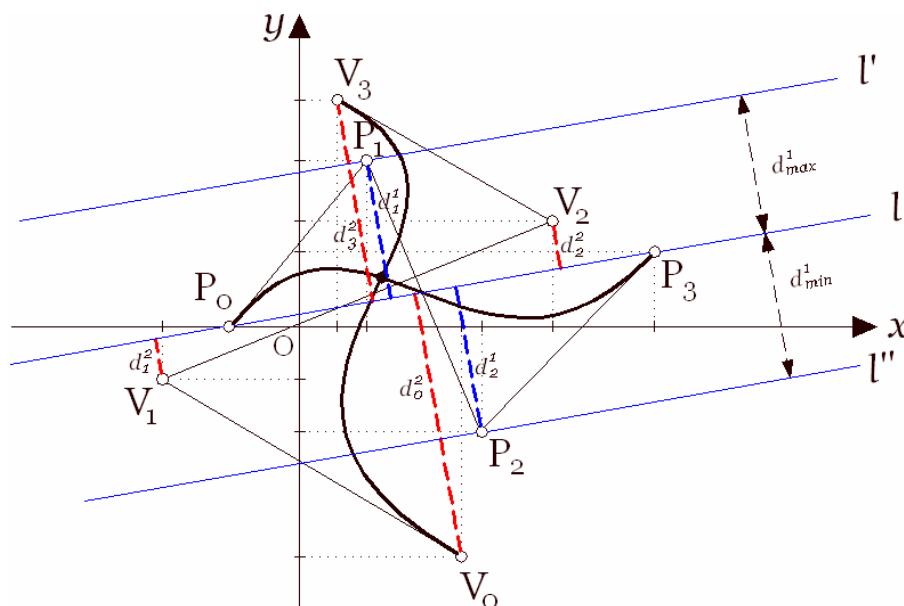
Obr. 21 CC algoritmus: zadanie

CC algoritmus (Curve-curve algorithm):

1. Test D
(nepretínania sa konvexných obalov dvoch Bézierových kriviek pomocou *Minmax obalov*)
Ak sa konvexné obaly pretínajú, tak chod' na krok 2,
inak sa krivky nepretínajú a algoritmus skončí

2. Konštrukcia hrubej priamky $l'l''$ krivky $\mathbf{P}(s)$, $s \in \langle m, n \rangle$ v smere priamky $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_3$ (obr. 22)

Ak vstupné krivky sú druhého alebo tretieho stupňa, podľa postupov uvedených v podkapitolách 3.3.2, 3.3.3 je vhodné zúžiť hrubú priamku na užší rovinný pás.



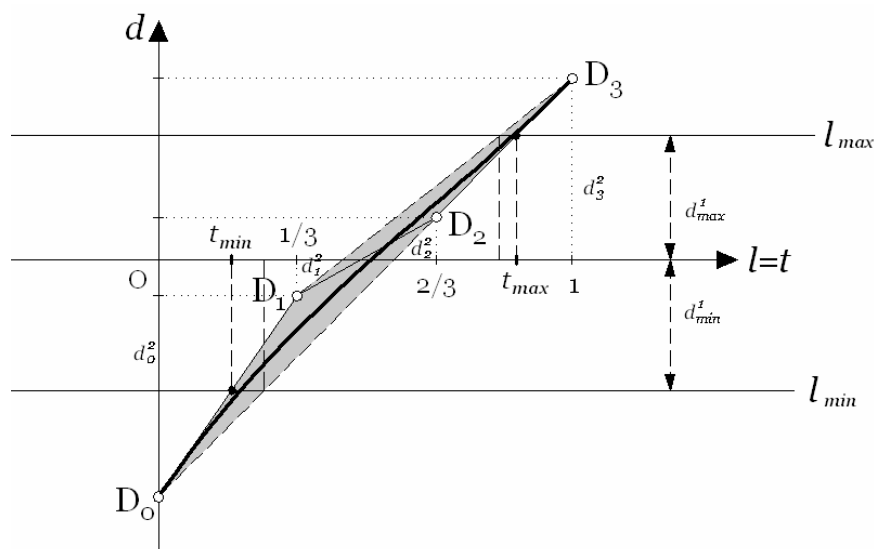
Obr. 22 CC algoritmus: konštrukcia hrubej priamky a orientované vzdialenosti

3. Konštrukcia priesečníkov krivky $\mathbf{V}(t)$ s priamkami l' a l'' , t.j.

CL algoritmus:

4. Orientovaná vzdialenosť $d_i^2 = av_i^x + bv_i^y + c$ vrcholov radiaceho polygónu $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_3$ od priamky l : dostávame množinu $\{d_0^2, d_1^2, d_2^2, d_3^2\}$
5. Určenie radiacích vrcholov $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ novej Bézierovej krivky, kde $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{3}; d_i^2 \right]$ pre $i = 0, 1, 2, 3$.
6. Stotožnenie priamky l s parametrickou osou t .

7. Priamky $l_{\min}, l_{\max} : l_{\max} \parallel l \wedge |ll_{\max}| = d_{\max}^1$
 $l_{\min} \parallel l \wedge |ll_{\min}| = d_{\min}^1$



Obr. 23 CC algoritmus: novovytvorená Bézierova krivka

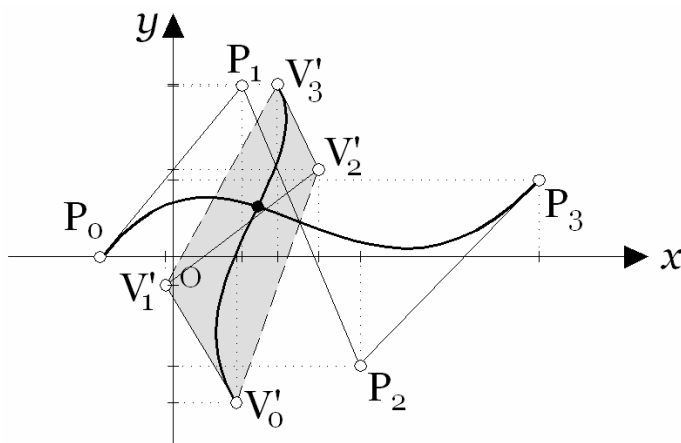
Upravený PT algoritmus:

8. Určenie konvexného obalu novovytvorenej krivky s vrcholmi D_i , $i = 0, 1, 2, 3$
9. Test A
10. Test B
11. Priemet prieniku $l_{\min} \cap KO$ na os t , čo je $\langle t_1^*, t_2^* \rangle$, resp. $t_1^* = t_2^*$.
 Priemet prieniku $l_{\max} \cap KO$ na os t , čo je $\langle t_1^{**}, t_2^{**} \rangle$, resp. $t_1^{**} = t_2^{**}$.
12. Určenie $t_{\min}, t_{\max}$ z množiny $\{t_1^*, t_2^*, t_1^{**}, t_2^{**}\}$
13. Pre hodnoty $t_{\min}, t_{\max}$ vyčíslit' body odpovedajúce na krivke $V(t_{\min})$, $V(t_{\max})$ pôvodnej krivky $V(t)$. Dostávame orezanú krivku $V'(t)$, pre ktorú $V'(0) = V(t_{\min})$, $V'(1) = V(t_{\max})$.
14. Test C
 (percentuálne porovnanie zmeny novovzniknutého intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ voči pôvodnému $\langle a, b \rangle$, resp. predchádzajúcemu intervalu)
 $\underline{\text{Ak}} |t_{\max} - t_{\min}| \leq \delta |b - a|$,
 $\underline{\text{tak}}$ chod' na krok 15,

inak pre $t_0 = \frac{|t_{\max} - t_{\min}|}{2}$ rozdeľ Béziovu krivku $\mathbf{B}(t)$ na dve nové Béziové krivky $\mathbf{V}_1'(t)$, $t \in \langle t_{\min}, t_0 \rangle$, $\mathbf{V}_2'(t)$, $t \in \langle t_0, t_{\max} \rangle$ a choď na krok 15 pre obidve nové krivky.

15. CPB – pre krivku $\mathbf{V}'(t)$, resp. pre krivky $\mathbf{V}_1'(t)$, $\mathbf{V}_2'(t)$.

16. Späť na krok 1 (*CC algoritmus* upravujeme pre druhú krivku a opakujeme, pokiaľ $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle < \varepsilon$ (resp. $\langle t_{\min}, t_0 \rangle < \varepsilon$, $\langle t_0, t_{\max} \rangle < \varepsilon$),
 $\langle s_{\min}, s_{\max} \rangle < \varepsilon$ (resp. $\langle s_{\min}, s_0 \rangle < \varepsilon$, $\langle s_0, s_{\max} \rangle < \varepsilon$),
 pričom ε je dopredu pevne zvolená hodnota).



Obr. 24 CC algoritmus: výsledok

V *CC algoritme* sme použili upravený *PT algoritmus* namiesto klasického, pretože dáva kratší čas na orezanie, ale širšiu hrubú priamku v každom cykle algoritmu, čo sa pri programovej implementácii javí ako podstatná výhoda.

Kapitola 4

Záver a ďalšia práca

Modelovanie kriviek v CAGD prezentuje veľký fenomén v podobe algoritmických riešení vyšetovania prieniku kriviek. Pretože naša práca, ako už bolo v úvode spomenuté, zahŕňa zatiaľ planárne konštrukcie a algoritmy, bude potrebné rozšírenie rovinných vzťahov na priestorové, čiže prechod z E^2 do priestoru E^3 . Snaha využiť vlastnosti dvojrozmerných matematických objektov v priestore E^3 bude vyžadovať napr. aj zmenu reprezentácie Bézierových kriviek na iný typ kriviek, nové konverzie, resp. inverzie medzi reprezentáciami kriviek, rozšírenie hrubej priamky na „hrubý pás“ a v neposlednom rade i zmena vzdialenostnej funkcie pre priestorové krivky.

Ako sme naznačili už v úvodných kapitolách, celá práca je založená na teórii Bézierových kriviek a ich vlastnosti konvexného obalu. Je nevyhnutné spomenúť, že Bézierove krivky majú okrem mnohých výhod aj isté nevýhody. Preto sa zameriame na iné typy kriviek.

4.1 Bézierovo orezávanie pre nebézierovské krivky

Nevýhody Bézierových kriviek „odstraňujú“ rôzne druhy splajnových kriviek, ktoré sú mnohé interpolačné a majú výhodu lokálnej zmeny; pri zmene jedného vrcholu riadiacej lomenej čiary sa zmenia len v okolí tohto bodu. Našťastie, segmenty splajnových kriviek možno vyjadriť v tvare Bézierových kriviek a preto možno uvažovať aj o rozšírení Bézierovho orezávania na takéto krivky.

Vlastnosť konvexného obalu majú aj mnohé triedy splajnových kriviek, teda nielen ich jednotlivé segmenty. Pokúsime sa zistiť, do akej miery možno previesť idey Bézierovho orezávania do tejto oblasti.

Pretože metóda Bézierovho orezávania má veľa nedoriešených otázok, spomeňme aspoň niektoré, ktorým sa budeme ďalej venovať:

4.2 Konvergencia Bézierovho orezávania

Ako z názvu vyplýva, bude reč o dôkaze, ktorý zabezpečí, že po konečnom počte krokov orezávania konvexného obalu krivky [podkap. 3.1] bude vzdialenosť bodov $t_{\min}, t_{\max}$ parametrickej osi t menšia ako kladná konštanta ε vopred zadaná, t.j. $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$. Ide o dôkaz, prostredníctvom ktorého ukážeme, že priesečník krivky s osou t naozaj existuje a s istou odchýlkou ho dokážeme vyčíslit' ako stred úsečky $\overline{t_{\min} t_{\max}}$.

4.3 Programová realizácia

Podstatou programovej realizácie algoritmov opísaných v kapitole 3 bude ich implementácia do programovacieho jazyka Pascal v prostredí Delphi 4.0. Pretože algoritmy sú pomerne náročné, bude potrebné doriešiť veľa problémov spojených s prepisom do aktuálneho programovacieho jazyka a vizualizáciou geometrických situácií skúmaných kriviek. Predmetom ďalšej práce sa stáva aj rozšírenie stupňa n Bézierových kriviek na stupne väčšie ako 3, poprípade nájsť a overiť vzťahy Bézierovho orezávania euklidovského priestoru vyššej dimenzie.

Pri riešení prienikov kriviek môžeme vyšetrovať správnosť výsledkov aj analytickým spôsobom. Považujeme to za matematicky presný a správny postup riešenia koreňov polynómov.

Prínos našej práce predpokladáme aj v algoritmickej riešení problému prieniku kriviek v priestore E^3 . Vyšetrovanie prieniku priestorových kriviek by bolo možné na základe vlastností kolmého premietania na dve navzájom kolmé roviny (tzv. Mongeovo premietanie).

4.4 Experimenty

V tejto časti sa zameriame na experimentálnu stránku problému. Budeme testovať na mnohých (rádovo desiatkach) náhodných i riadených pokusoch, či algoritmus dáva správny výsledok. Ďalej by bolo vhodné overiť chybu, s akou algoritmus pracuje a tiež jeho rýchlosť. Z týchto hľadísk porovnáme algoritmus s analyticky presným výpočtom (ak je možný) a s klasickými numerickými algoritmami (Newtonov, delenie intervalu a iné).

Ako sme spomenuli na konci *CC algoritmu* [kap. 3.3.3], pri probléme vyšetrovania prieniku dvoch Bézierových kriviek môžeme využiť dve metódy orezania konvexného obalu krivky pomocou hrubej priamky. Preto bude zaujímavé štatisticky overiť a porovnať rýchlosť konvergencie oboch variantov algoritmu a vybrať vhodnejšiu z nich.

Zoznam použitej literatúry

Literatúra

- [1] BARTOŇ, M.: *Bivariate linear clipping*. Proceedings of the 26th Conference on Geometry and Computer Graphics. Nové Město na Moravě, 2006, ČR. (v tlači)
- [2] CAMPANGA, S., SLUSALLEK, P.: *Improving Bézier Clipping and Chebyshev Boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces*. Technical report, University of Erlangen, Computer Graphics Group, 1996.
- [3] EFRENOV, A., HAVRAN, V., SEIDEL, H.-P.: *Efficient Ray Tracing of Trimmed NURBS Surfaces*. Master Thesis in Computer Science. Saarbrücken, 2004. pp. 33-40.
- [4] EFRENOV, A., HAVRAN, V., SEIDEL, H.-P.: *Robust and Numerically Stable Bézier Clipping Method for Ray Tracing NURBS Surfaces*. Proceedings of SCCG, Budmerice 2005. Comenius University, Bratislava, 2005. ISBN 80-223-2057-9. pp. 123-131.
- [5] FARIN, Gerald E. – HANSFORD, Dianne: *The Essentials of CAGD*. Natick, MA: A K Peters Ltd., 2000.
- [6] HEJNÝ, Milan – ZAŤKO, Valent – KRŠŇÁK Pavel: *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.
- [7] HLÚŠEK, R.: *Bézier Curves Intersection Using Relief Perspective*, Proceedings of SCG'2000. Bratislava, 2000.
- [8] HORÁK, J., JANYŠKA, J.: *Analytická geometrie*. Skriptá MU, Brno 2002.

- [9] CHALMOVIANSKÝ, P., FERKO, A., GALBAVÝ, R., NIEPEL, L.: ***Zložitosť geometrických algoritmov***. FMFI UK, Bratislava, 2001. ISBN 80-223-1598-2.
- [10] KATRIŇÁK, T., GAVALEC, M., GEDEONOVÁ, E., SMÍTAL, J.: ***Algebra a teoretická aritmetika***. UK Bratislava, 2002. ISBN 80-223-1674-1.
- [11] KLETTE Reinhard and ROSENFELD Azriel: ***Digital Geometry Geometric Methods for Digital Picture Analysis***. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- [12] KMEŤOVÁ, M.: ***Dynamické geometrické programy vo vyučovaní Bézierových kriviek***. Proceedings of the 25th Conference on Geometry and Computer Graphics. Janov nad Nisou, 2005, ČR. ISBN 80-7015-013-0. pp. 103-111.
- [13] KUDLIČKOVÁ, S.: ***Working with Bézier Curves and Controlling Their Shape***. Proceedings of Symposium on Computer Geometry, SCG'2004, vol. 13. Kočovce, 2004, SR. ISBN 80-227-2133-6. pp. 70-76.
- [14] MACHALOVÁ, Z.: ***Prieniky jednoduchých splajnových kriviek s využitím metódy Bézier clipping***. Rigorózna práca. FMFI UK, Bratislava, 1999.
- [15] MARCH, D.: ***Applied Geometry and Geometry Modeling***. Springer-Verlag, London, 1999.
- [16] NISHITA, T.: ***Application of Bézier clipping method and their Java applets***. Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics. Budmerice, 1998. Comenius University, Bratislava, 1998. ISBN 80-223-0837-4. pp.3-15.
- [17] NISHITA, T., SEDERBERG, T.W., KAKIMOTO, M.: ***Ray Tracing Trimmed Rational Surface Patches***. SIGGRAPH '90: Proceedings of the 17th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. ACM Press. New York, USA, 1990. pp. 337-345.
- [18] PALAJ, V.: ***Algoritmy Bézierovho orezávania pre prieniky čiar***. Projekt dizertačnej práce. Comenius University, Bratislava, 2006.
- [19] PALAJ, V., KUDLIČKOVÁ, S.: ***Geometric Background of Bézier Clipping Method***. Proceedings of the 26th Conference on Geometry and Computer Graphics. Nové Město na Moravě, 2006, ČR. (v tlači)
- [20] QUILIN, D., DAVIES: ***Surface Engineering Geometry for Computer Aided Design and Manufacture***. Ellis-Horwood, 1987. ISBN: 0-7458-0181-1.

- [21] SALOMON, D.: *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [22] SAMUELČÍK, M.: *Bézier and B-Spline volumes*. Projekt dizertačnej práce. Bratislava, 2006.
- [23] SEDERBERG, Thomas W.: *Computer Aided Geometric Design*, 2003. <http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf>
- [24] SZARKOVÁ, D., ZÁMOŽÍK, J.: *Priesečníky čiar*. Proceedings of Symposium on Computer Geometry, SCG'2004, vol. 13. Kočovce, 2004, SR. ISBN 80-227-2133-6. pp. 119-125.
- [25] VELICHOVÁ, D.: *Konštrukčná geometria*. Slovenská technická univerzita, Bratislava, 1996.
- [26] WANG, S.-W., SHIH, Z.-C., CHANG, R.-C.: *An Improved Rendering Technique for Ray Tracing Bézier and B-spline Surfaces*. The Journal of Visualization and Computer Animation, 2000. pp. 209-219.

Internet

- [1] <http://portal.acm.org>
- [2] <http://citeseer.ist.psu.edu>
- [3] <http://www.math.sk/skripta2/index.html>